تطبيقات فيزيائية Physical Applications

أولاً : مسائل درجة الحرارة

ينص قانون نيوتن للتبريد على ان **(معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب طردياً مع الفرق في درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به)** فاذا كانت T هي درجة حرارة الجسم و T_s هي درجة حرارة الوسط المحيط فان معدل التغير الزمني لدرجة حرارة الجسم $\frac{dT}{dt}$ ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد كالآتي :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + kT = kT_s}$$

مثال (١) وضعت قطعة معدنية درجة حرارتها 100°F في مختبر درجة حرارته ثابتة عند 0°F ، بعد $20\ min$ اصبحت درجة حرارة القطعة 50°F جد : (١) الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القطعة الى 25°F .

(٢) درجة حرارة القطعة بعد $10\ min$.

الحل :

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s \qquad \rightarrow \qquad \frac{dT}{dt} + kT = 0$$

وهذه معادلة يمكن فصل متغيراتها لتصبح :

$$\frac{dT}{T} = -kdt$$

والتي حلها :

$$\ln T = -kt + c_1 \qquad \rightarrow \qquad T = e^{-kt+c_1} \quad \rightarrow \quad T = ce^{-kt}$$

ولمعرفة قيمة الثابت c نعوض الشروط الابتدائية $T = 100$ عند $t = 0$

$$100 = ce^{-k\times 0} \qquad \rightarrow \qquad c = 100$$

وبهذا يصبح الحل

$$T = 100e^{-kt}$$

الآن نجد قيمة الثابت k

$$50 = 100e^{-20k} \rightarrow \ e^{-20k} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \ -20k = \ln\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -20k = -\ln 2$$

$$\therefore \quad k = \frac{\ln 2}{20} = 0.0347$$

وبهذا تصبح العلاقة بين درجة حرارة القطعة المعدنية والزمن (حيث الزمن بالدقائق)

$$T = 100e^{-0.0347t}$$

الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القطعة الى 25°F .

$$25 = 100e^{-0.0347t} \quad \rightarrow \quad e^{-0.0347t} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 0.0347t = \ln 4 \quad \therefore t = 40\ min$$

درجة حرارة القطعة بعد عشر دقائق

$$T = 100e^{-0.0347\times 10} = 70.68°\text{F}$$

مثال (٢) وضع جسم درجة حرارته مجهولة في ثلاجة درجة حرارتها ثابتة وتساوي $-20℃$ ، بعد نصف ساعة اصبحت درجة حرارة الجسم $10℃$ وبعد ساعة اصبحت درجة حرارة الجسم $-10℃$ فجد

(١) درجة الحرارة الابتدائية للجسم (٢) الزمن اللازم لكي تكون درجة حرارة الجسم $-19℃$

الحل : درجة الحرارة الابتدائية للجسم عند $t = 0$ هي T_0

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + kT = -20k$$

واضح ان المعادلة خطية فيها $P(t) = k \;,\; Q(t) = -20k$

لذا فان عامل التكامل

$$I.F = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$(I.F)\,T = \int (I.F)\,Q(t)dt + c \quad \rightarrow \quad e^{kt}\,T = \int e^{kt}\,(-20k)dt + c$$

$$e^{kt}\,T = -20e^{kt} + c \quad \rightarrow \quad T = -20 + ce^{-kt}$$

عند $t = 0$

$$T_0 = -20 + c \quad \rightarrow \quad c = T_0 + 20 \qquad \cdots (1)$$

عند $t = 30$

$$10 = -20 + ce^{-30k} \quad \rightarrow \quad c = 30e^{30k} \qquad \cdots (2)$$

عند $t = 60$

$$-10 = -20 + ce^{-60k} \quad \rightarrow \quad c = 10e^{60k} \qquad \cdots (3)$$

بقسمة معادلة (2) على معادلة (3) نحصل على

$$1 = 3e^{-30k} \quad \rightarrow \quad e^{-30k} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 30k = \ln 3 \quad \rightarrow \quad k = 0.0366$$

نعوض $30k = \ln 3$ في المعادلة (2) فنحصل على $c = 90$

$$T_0 = -20 + c \quad \rightarrow \quad T_0 = -20 + 90 = 70℃$$

وبهذا تصبح العلاقة بين درجة حرارة الجسم والزمن

$$T = 90e^{-0.0366t} - 20$$

الزمن اللازم لكي تكون درجة حرارة الجسم $-19℃$

$$-19 = 90e^{-0.0366t} - 20 \quad \rightarrow \quad e^{-0.0366t} = \frac{1}{90} \quad \rightarrow -0.0366t = -\ln 90$$

$$t = 123\,min$$

ثانياً : مسائل الجسم الساقط

لنعتبر ان جسماً كتلته M ساقطاً من اعلى متأثراً فقط بالجاذبية الارضية g ومقاومة الهواء التي تتناسب طردياً مع سرعة الجسم ، نفرض ان كل من الجاذبية الارضية والكتلة ثابتان وباستعمال قانون نيوتن الثاني للحركة والذي ينص على ان **(محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة مضروباً بالكتلة الثابتة)** أي

$$F = M\frac{dv}{dt} \qquad \cdots\ (1)$$

حيث F هي محصلة القوى المؤثرة على الجسم و v هي سرعة الجسم ، كلاهما عند الزمن t

هنا لدينا قوتان تؤثران على الجسم هما الاولى وزن الجسم $W = M\mathrm{g}$ والثانية هي قوة مقاومة الهواء $-kv$ حيث $0 \leq k$ هو ثابت التناسب والاشارة السالبة هنا لان اتجاه القوة عكس اتجاه السرعة وبالتالي فان محصلة القوى هي

$$F = M\mathrm{g} - kv \qquad \cdots\ (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نحصل على

$$M\frac{dv}{dt} = M\mathrm{g} - kv$$

بالقسمة على M نحصل على

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v = \mathrm{g}}$$

مثال (٣) أُسقط جسم ساكن كتلته $M = 5\ k\mathrm{g}$ من ارتفاع $100\ m$ احسب الزمن اللازم لوصوله الى الارض

(١) بفرض عدم مقاومة الهواء (٢) اذا كانت مقاومة الهواء $kv = (1/8)v$ حيث vهي سرعة الكرة (m/sec)

$$(1)\ \ \frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v = \mathrm{g} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 9.8 \quad \rightarrow \quad dv = 9.8dt \quad \rightarrow \quad v = 9.8t + c$$

بما ان الجسم كان ساكناً لذا عند $t = 0$ تكون $v = 0$ وعليه فان $c = 0$ لذلك فان معادلة الحركة تصبح :

$$v = 9.8t \quad \rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = 9.8t \quad \rightarrow \quad ds = 9.8t\ dt \quad \rightarrow \quad s = 4.9t^2 + c_1$$

بما ان الجسم كان ساكناً لذا عند $t = 0$ تكون $s = 0$ وعليه فان $c_1 = 0$ لذلك فان

$$s = 4.9t^2$$

لذا فان الزمن اللازم لوصول الجسم الى الارض هو

$$t = \sqrt{\frac{s}{4.9}} = \sqrt{\frac{100}{4.9}} = 4.5\ \ sec$$

$$(2)\ \frac{dv}{dt}+\frac{k}{M}v=\mathrm{g} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+\frac{1}{8\times 5}v=9.8 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+0.025v=9.8$$

والمعادلة التفاضلية الاخيرة يمكن فصل متغيراتها

$$\frac{dv}{9.8-0.025v}=dt \quad \rightarrow \quad t=\frac{-1}{0.025}\ln|9.8-0.025v|+c \rightarrow \quad t =-40\ln|9.8-0.025v|+c$$

عند $t=0$ تكون $v=0$ وعليه فان

$$0=-40\ln 9.8+c \quad \rightarrow \quad c=91.3$$

$$\therefore\ t=-40\ln|9.8-0.025v|+91.3 \quad \rightarrow \quad \ln|9.8-0.025v|=0.025(91.3-t)$$

$$9.8-0.025v=e^{0.025(91.3-t)} \quad \rightarrow \quad v=40\left(9.8-e^{0.025(91.3-t)}\right)$$

$$\frac{ds}{dt}=40\left(9.8-e^{0.025(91.3-t)}\right) \quad \rightarrow \quad ds=40\left(9.8-e^{0.025(91.3-t)}\right)dt$$

$$s=40\left(9.8t+40e^{0.025(91.3-t)}\right)+c_1$$

عند $t=0$ تكون $s=0$ لذا

$$0=40\left(9.8\times 0+40e^{0.025(91.3-0)}\right)+c_1 \quad \rightarrow \quad c_1=-15681.844$$

$$\therefore\ s=40\left(9.8t+40e^{0.025(91.3-t)}\right)-15681.844$$

لايجاد الزمن اللازم لوصول الجسم الى الارض

$$100=40\left(9.8t+40e^{0.025(91.3-t)}\right)-15681.844$$

$$9.8t+40e^{0.025(91.3-t)}=394.546 \qquad \div 40$$

$$0.245t+e^{0.025(91.3-t)}=9.864$$

لايجاد قيمة t من المعادلة الاخيرة نعتبر المقدار $e^{0.025(91.3-t)}$ مقارباً الى الصفر لوجود الاشارة السالبة قبل t

$$0.245t=9.864 \quad \rightarrow \quad t=40.26\ \ sec$$

ثالثاً : مسائل الدوائر الكهربائية

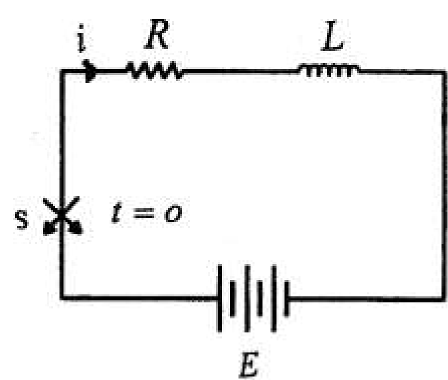
تتكون الدائرة الكهربائية البسيطة من مقاومة R بالاوم ومكثف C بالفاراد وحث L بالهنري وقوة دافعة كهربائية (ق .د .ك) E بالفولت وبطارية أو مولد متصلين جميعهم على التوالي . يُقاس التيار i بالامبير والشحنة q على المكثف بالكولوم .

وينص قانون كيرشوف على ان **(المجموع الجبري للجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوي صفر)** .

ومعلوم لدينـا ان فرق الجهد خلال مقاومة هو Ri

و خلال المكثف هو V_c وخلال الحث هو $L(di/dt)$

مثال (٤) في الدائرة الكهربائية ادناه اذا كان $R = 10\ \Omega$, $L = 10mH$, $E = 20v$ فجد شدة التيار عند اي لحظة



الحل : بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على هذه الدائرة نحصل على

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E \quad \rightarrow \quad 10\frac{di}{dt}+10i=20 \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt}+i=2$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن فصل متغيراتها لتصبح :

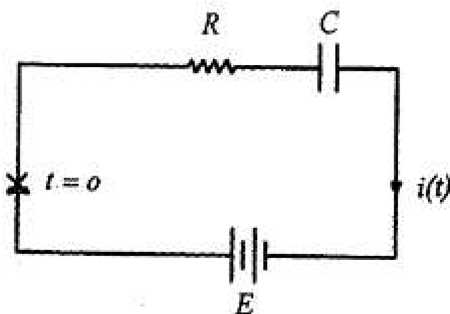
$$\frac{di}{2-i}=dt \quad \rightarrow \quad -\ln|2-i|=t+c$$

لاحظ انه عندما $t = 0$ فان $i = 0$ وعليه فان $c = -\ln 2$ لذا

$$\ln|2-i|=(\ln 2)-t \quad \rightarrow \quad 2-i=2e^{-t}$$

أو $i = 2-2e^{-t}$ وهي شدة التيار عند اي لحظة .

مثال (٥) في دائرة التوالي RC ادناه اذا كان المكثف C غير مشحون من الاصل ، قفل المفتاح عند $t = 0$ فجد شدة التيار عند اي لحظة



الحل : العلاقة بين الجهد عبر المكثف V_c والشحنة عليه q والتيار المار فيه i هي :

$$q = CV_c$$

$$i=\frac{dq}{dt}=C\frac{dV_c}{dt}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على هذه الدائرة نحصل على $(Ri + V_c = E)$

$$RC\frac{dV_c}{dt}+V_c=E \quad \rightarrow \quad \frac{dV_c}{dt}+\frac{1}{RC}V_c=\frac{E}{RC}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عامل تكاملها هو :

$$e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{1}{RC}t}$$

$$e^{\frac{1}{RC}t}V_c = \int \frac{E}{RC} e^{\frac{1}{RC}t}\,dt = E e^{\frac{1}{RC}t} + A$$

حيث A هو ثابت التكامل ، ومنها نحصل على :

$$V_c = E + A\, e^{\frac{-1}{RC}t}$$

وبما ان المكثف لم يكن مشحوناً أي انه عندما $t = 0$ فان $V_c = 0$ فيكون $A = -E$ وعليه

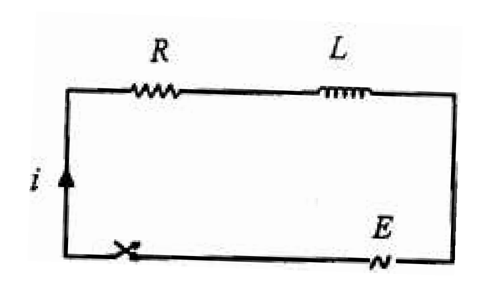
$$V_c = E\left(1 - e^{\frac{-1}{RC}t}\right)$$

ولحساب شدة التيار نشتق المعادلة اعلاه بالنسبة للزمن

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV_c}{dt} = \frac{E}{R}e^{\frac{-1}{RC}t}$$

مثال (٦) لتكن لدينا الدائرة المبينة ادناه حيث القوة الدافعة الكهربائية متناوبة $E(t) = E_0 \cos \omega t \quad , \omega = 2\pi f$

جد شدة التيار على فرض ان $i(0) = 0$



الحل : بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على هذه الدائرة نحصل على

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \cos \omega t \qquad \to \qquad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}\cos \omega t$$

عامل التكامل هو : $e^{\frac{R}{L}t}$

$$i(t) = e^{\frac{-R}{L}t}\left[A + \frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos \omega t \;\; dt\right] \qquad \cdots (1)$$

الآن نجد $\int e^{\frac{R}{L}t}\cos \omega t \;\; dt$

$\underline{e^{\frac{R}{L}t}\ and\ it's\ D.}$		$\underline{\cos \omega t\ \ and\ it's\ I.}$
$e^{\frac{R}{L}t}$	+	$\cos \omega t$
$\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}t}$	-	$\frac{1}{\omega}\sin \omega t$
$\frac{R^2}{L^2}e^{\frac{R}{L}t}$	+	$-\frac{1}{\omega^2}\cos \omega t$

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t \ \ dt = e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{1}{\omega}sin\,\omega t + \frac{R}{L\omega^2}\cos\omega t\right) - \frac{R^2}{L^2\omega^2}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t \ \ dt$$

$$\left(1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}\right)\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t \ \ dt = e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{1}{\omega}sin\,\omega t + \frac{R}{L\omega^2}\cos\omega t\right)$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t \ \ dt = \left(\frac{L^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{1}{\omega}sin\,\omega t + \frac{R}{L\omega^2}\cos\omega t\right) \quad \cdots (2)$$

نعوض (2) في (1) فنحصل على

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\left(L\omega\, sin\,\omega t + R\cos\omega t\right) + Ae^{\frac{-R}{L}t}$$

وحيث ان $i(0) = 0$ لذا فان

$$A = \frac{-RE_0}{R^2+L^2\omega^2}$$

$$\therefore \quad i(t) = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\left(L\omega\, sin\,\omega t + R\cos\omega t - Re^{\frac{-R}{L}t}\right)$$

تمارين

١. وضع جسم درجة حرارته $50°F$ في مختبر درجة حرارته ثابتة وتساوي $100°F$ ، بعد $5\ min$ اصبحت درجة حرارة الجسم $60°F$ فجد (١) الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم الى $75°F$

(٢) درجة حرارة الجسم بعد $20\ min$

٢. سقطت كرة حديدية ساكنة وزنها $1\ kg$ من ارتفاع $3000\ m$ واثناء سقوطها واجهت مقاومة الهواء التي تساوي عدداً $(v/8)\ kg$ حيث v هي سرعة الكرة (m/sec) جد :

(١) السرعة النهائية للكرة (٢) الزمن اللازم لوصول الكرة الى الارض .

٣. لتكن لدينا الدائرة المبينة ادناه حيث القوة الدافعة الكهربائية متناوبة $E(t) = 10\cos 50t$ ومقاومتها $R = 10\ \Omega$ ومحاثتها $L = 10H$ جد شدة التيار على فرض ان $i(0) = 0$

